Effet Hall Quantique

Xavier Bertou

20.05.1995

Abstract

Cet article aborde l'effet Hall quantique principalement comme application de la théorie des anyons. On y trouvera néanmoins les bases de l'effet Hall quantique entier. Pour une approche synthétique quoique plus précise que celle de cet article, se reporter à l'excellent ouvrage de M. Stone [1].

1 Rappel: Effet Hall Classique

1.1 Aspect qualitatif

Considérons un conducteur rectangulaire de largeur a et d'épaisseur b, parcouru dans sa longueur par un courant d'intensité I. Plaçons le conducteur en présence d'un champ magnétique B normal au conducteur (Fig 1). Pour comprendre le phénomène, suivons le mouvement d'une particule chargée quelconque.

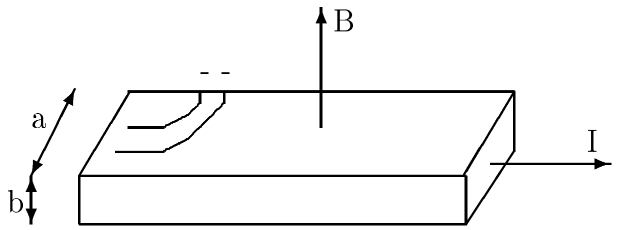

Fig 1

Une particule chargée arrive dans le conducteur avec une vitesse initiale dépendant de l'intensité du courant. Elle est alors soumise à une force de Laplace de la forme: $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$. Elle décrit donc une trajectoire circulaire et va heurter un des bords du conducteur (Fig 1). Il y a ainsi accumulation de charges sur un des deux bords du conducteur. Ces charges créent alors un champ électrique dont l'effet sur les particules en mouvement tend à s'opposer à celui du champ magnétique. Après ce régime transitoire, pour que les particules chargées puissent circuler le long du conducteur, il faut que les deux forces s'équilibrent.

1.2 Aspect quantitatif

Pour cela, il faut que :

$$\vec{F_e} = -\vec{F_m}$$

Notons V_h la tension entre les 2 bords du conducteur et v la vitesse des porteurs de charge. On a $V_h = avB$

V_h est bien entendue la tension de Hall.

En notant n le nombre de porteurs de charge par unité de volume et q leur charge individuelle, on aboutit à :

$$I = abvnq$$
$$soit \quad V_h = \frac{IB}{nbq}$$

On définit alors R_h, résistance de Hall, comme :

$$R_h = \frac{1}{nq}$$
$$V_h = R_h \frac{IB}{b}$$

Ces résultats peuvent s'obtenir de nombreuses façons différentes, celle-ci présentant l'avantage d'être assez intuitive, parlante, et de nécessiter très peu de moyens pour la mettre en oeuvre.

Une étude plus précise du phénomène peut facilement être obtenue en considérant en lieu et place de la loi d'ohm la relation:

$$\vec{E} = \frac{\vec{\jmath}}{\gamma} + R_h.\vec{B} \wedge \vec{\jmath}$$

où $\vec{\jmath}$ est la densité volumique de courant, γ la conducivité et R_h la constante de Hall.

2 Effet Hall Quantique Entier

2.1 Étude générale

Étudions donc de plus près son homologue quantique[1].

Nous considèrerons dorénavant un milieu bidimensionnel de dimensions L_x et L_y constitué d'un gaz d'électrons. Plaçons le en présence d'un champ magnétique normal au plan. En prenant pour condition de jauge celles de Landau: $A_x = By, A_y = 0$, on peut résoudre l'équation de schrödinger:

$$H\psi = E\psi$$

$$\Big(\frac{-1}{2m}\partial_{xx} - \frac{1}{2m}(\partial_y - ieBx)^2\Big)\psi(x,y) = E\psi(x,y)$$

Posons $\quad \psi(x,y) = e^{iky} f_n(x)$

$$\Big(\frac{-1}{2m}\partial_{xx} + \frac{1}{2m}(k - eBx)^2\Big) f_n(x) = E_n f_n(x)$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique.

$$\psi_k(x,y) = e^{iky} e^{-\frac{eB}{2}(x-k/eB)^2}$$

L'énergie E_n correspondante est $\varepsilon_0 = \frac{eB}{2m}$.

Soit $\omega_c = \frac{eB}{m}$. On a usuellement $\omega_c \simeq 1,2K$. L'effet Hall quantique est donc facilement dissimulé par l'agitation thermique. Cependant, dans un solide, m est remplacé par m^*, masse effective de l'électron, laquelle dépendant de la structure du solide peut se trouver jusqu'a 30 fois plus petite que m. Le phénomène est donc observable à des températures de l'ordre de $40K$.

On a un courant associé à cette fonction d'onde égal à:

$$j_y = \frac{1}{2mi}(\psi^\dagger \partial_y \psi - (\partial_y \psi^\dagger)\psi)$$

Après normalisation, on obtient:

$$j_y = \sqrt{\frac{eB}{\pi}} \frac{1}{Ly} \frac{k - eBx}{m} e^{-eB(x-k/eB)^2}$$

Du fait de la symétrie par rapport au point $x = k/eB$, l'intensité $I_\psi = \int_x j_y$ est nulle.

[1] découvert en 1980 par K. v. Klitzing [2]

Rajoutons alors une ddp $V(x) = -eEx$. On obtient par un raisonnement analogue:

$$\psi_k(x,y) = e^{iky} e^{-\frac{eB}{2}(x-k/eB-mE/eB^2)^2}$$

On a alors une intensité I_ψ suivant y non nulle égale à $I_\psi = \frac{eE}{BL_y}$.

On a de même des fonctions d'ondes dérivées de la fonction harmonique qui nous donnent des énergies de $\varepsilon_n = \frac{eB}{m}(n+\frac{1}{2})$. Soit ε_f l'énergie de fermi. Les niveaux situés au dessus de ε_f seront vides et ceux au dessous seront pleins. On doit donc avoir une estimation du nombre d'état de notre système.

Des conditions de bord périodique suivant y (travail sur un anneau torique) nous donnent $k_n = \frac{2\pi n}{L_y}$. Par ailleurs, la fonction d'onde ψ a un pic maximum en $x = \frac{k}{eB} + \frac{mE}{eB^2}$. Pour que ce pic tombe a l'intérieur de la boite (il est souhaitable que la particule reste dans notre anneau), on doit avoir $\Delta k = eBL_x$. D'où:

$$\mathcal{N} = \frac{eBL_xL_y}{2\pi}$$

Un niveau de landau transporte donc $I_0 = \mathcal{N} I_\psi = \frac{e^2EL_x}{2\pi}$. En notant ε la ddp ($\varepsilon = EL_x$), on a $I_0 = \frac{e^2}{2\pi}\varepsilon$.

Si n niveaux de landau sont remplis, on en déduit:

$$I_{tot} = \frac{ne^2}{2\pi}\varepsilon$$

En rétablissant les constantes h et $\hbar$ (on avait pris $h = 2\pi$):

$$I_{tot} = \frac{ne^2}{h}\varepsilon$$

$$\sigma = \frac{ne^2}{h}$$

On obtient donc bien une quantification de notre effet Hall.

Il est intéressant de noter par ailleurs que $\sigma_{xx} = \rho_{xx} = 0$ car le courant et la ddp dans le sens du champ sont nuls. Le tenseur de la conductivité de Hall est donc purement transverse. Il en résulte certaines propriétés des plus utiles expérimentalement : le courant suit les équipotentielles et le courant entre deux équipotentielles dépend uniquement de leur différence de potentiel. On peut ainsi, tout comme pour l'effet Hall classique, mesurer facilement σ.

Un des résultats qui surprit le plus lors de la découverte de l'effet Hall quantique fut la très grande exactitude de la quantification. Les palliers étaient larges, et la présence d'impuretés dans le milieu ne semblait rien modifier. Plusieurs explications furent avancées. La première, dite "*scattering theory*"[3], démontrait que l'ajout d'une singularité au potentiel (une fonction δ) ne modifiait pas la valeur de σ. Le calcul était clair, même si le résultat en lui-même paraissait toujours aussi miraculeux. Il fut démontré par la suite qu'une percolation continue de faible amplitude ne modifiait rien non plus[4]. Cependant, l'explication du phénomène vint de Laughlin [7]:

2.2 Principe de jauge de Laughlin

cette quantification était due à un principe fondamental : un principe de jauge. Pour démontrer cela, considérons un anneau plat (*Fig 2*) de longueur L et traversé par un champ magnétique normal H_0. La ddp entre les deux bords de l'anneau est égale à ΔV.

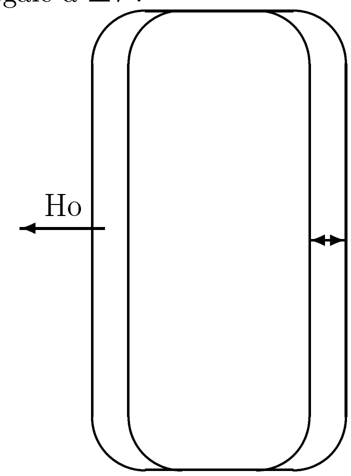

Fig 2

Considérons le Hamiltonien isotropique:

$$H = \frac{1}{2m^*}\Big[\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\Big]^2 + eE_0 y$$

où E_0 est le champ le long de l'anneau, et avec $\vec{A} = H_o y \vec{x}$. Les fonctions d'onde sont alors :

$$\psi_{k,n} = e^{ikx}\phi_n(y - y_0)$$

où ϕ_n et y_o sont obtenus par

$$\Big[\frac{1}{2m^*}{p_y}^2 + \frac{1}{2m^*}\Big(\frac{eH_o}{c}\Big)^2 y^2\Big]\phi_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c\phi_n$$

$$y_0 = \frac{1}{\omega_c}\Big(\frac{\hbar k}{m^*} - \frac{cE_0}{H_0}\Big)$$

Ainsi, une modification $\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \Delta\vec{A}$ se répercute uniquement en $y_0 \longrightarrow y_0 - \frac{\Delta A}{H_0}$. L'énergie vaut

$$\epsilon_{n,k} = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega_c + eE_0 y_0 + \frac{1}{2}m^*(cE_0/H_0)^2$$

Elle dépend donc linéairement de ΔA.

Le courant I le long de l'anneau vaut

$$I = c\frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{c\partial U}{L\partial A}$$

Si tous les états sont localisés, A modifiera simplement chaque fonction d'onde par un facteur multiplicatif $exp(ieAx/\hbar c)$, x étant une coordonnée curviligne le long de l'anneau, et les modifications sur I et sur ϵ seront nulles. Par contre, si un des états est étendu, la transformation de jauge est illégale[2] sauf si

$$A = n\frac{hc}{eL}$$

On a donc, avec $\Delta\phi = hc/e$

$$I = c\frac{\partial U}{\partial \phi} = c\frac{\Delta U}{\Delta \phi}$$

Ainsi, par invariance de jauge, le système redevient identique à lui même après l'ajout de $\Delta\phi$, ce qui correspond à un transfert de n électrons d'un bord à l'autre de l'anneau. Le courant vaut donc :

$$I = c\frac{neV}{\Delta\phi} = \frac{ne^2V}{h}$$

La quantification vient donc de ce principe de jauge $\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \Delta\vec{A}$.

3 Effet Hall Quantique Fractionnaire

3.1 Fonction de Laughlin

Alors que l'on croyait bien comprendre l'effet hall quantique, et ce à quoi il était du, on découvrit en 1982 que parfois on obtenait un effet Hall quantique

[2] A doit être périodique

fractionnaire, à savoir que notre entier n valait tout simplement p/q! Cela fut tellement surprenant que les premières allusions à l'effet Hall quantique fractionnaire parlent d'un "*anomalous Hall effect*". Néanmoins, la précision avec laquelle on obtenait une fraction (de l'ordre de 1 sur 10^5) ne permettait aucun doute : un effet fractionnaire existait donc bien.

Alors que ce phénomène était encore incompris, Laughlin résolu d'un coup tous les problèmes en posant pour fonction d'onde :

$$\psi_m = \mathcal{N}_m \prod_{i<j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{eB}{4\hbar c}\sum_J |z_J|^2}$$

Cette fonction est analytique, elle correspond donc bien niveau de Landau le plus bas. Elle est de plus antisymétrique pour m entier impair, et vérifie donc le principe de Pauli. Enfin, le facteur en $(z_i - z_j)$ correspond bien à une répulsion à courte portée. Mieux encore, il a été démontré que cette fonction d'onde de Laughlin est la solution d'un hamiltonien dans lequel apparaissent les pseudo-potentiels de Haldane [5], lesquels sont très proches du potentiel de coulomb. On découvrit par la suite que cette fonction d'onde découlait naturellement de la théorie des anyons.

Cette fonction d'onde nous mène à

$$\sigma = \upsilon \frac{e^2}{h} = \frac{1}{m}\frac{e^2}{h}$$

υ étant appelé facteur de remplissage.

Une large étude sur la fonction de Laughlin a été menée par analogie avec un plasma. En effet, en interprétant $|\psi_m|^2$ comme une densité de Boltzmann reliée à l'énergie V_m

$$V_m = -2m \sum_{I<J} ln|z_I - z_J| + \frac{eB}{2\hbar c}\sum_I |Z_I|^2$$

par analogie avec le potentiel d'un plasma

$$-q^2 \sum_{I<J} ln|z_I - z_J| + \frac{1}{2}\pi\rho q^2 \sum_I |Z_I|^2$$

on en déduit que notre sytème est équivalent à un plasma de charge

$$q = \sqrt{2m}$$

dans un milieu de concentration

$$\rho = \frac{eB}{2\pi\hbar c}\frac{1}{m}$$

Considérons désormais la fonction

$$\psi_m^{+z_\alpha} = \mathcal{N}_+ \prod_I (z_I - z_\alpha)\psi_m$$

Suivons le I-ème électron. Celui-ci se déplace dans notre "fluide", et voit à chaque coordonnée z_J un autre électron de charge $-e$. Lorsqu'il fait un tour autour d'un z_J, il y voit m unités de flux. Par contre, en $z = z_\alpha$, il ne voit qu'une unité de flux, donc qu'une fraction d'électron, puisque le facteur est en $(z_I - z_\alpha)$ au lieu de $(z_I - z_J)^m$. Nous sommes en présence de ce qu'on appelle un quasi-trou. Celui-ci se comporte comme une particule de charge $(-1/m)q$, avec q la charge de notre électron $(-e)$.

On peut aussi obtenir des quasi-particules en considérant

$$\psi_m^{-z_\alpha} = \mathcal{N}_- \prod_I (2\frac{eB}{\hbar c}\frac{\partial}{\partial z_I} - \bar{z_\alpha})\psi_m$$

On a alors une charge partielle $e^* = -e/m$.

Considérons maintenant un ensemble de quasi-trous. Après intégration des coordonnées z_I du milieu électronique, on obtient

$$\psi_{m_1}^{+} = \mathcal{N}' + \prod_{\alpha<\beta} (z_\alpha - z_\beta)^{m_1} e^{-\frac{eB}{4\hbar c}\sum_\alpha |z_\alpha|^2}$$

avec $m_1 = 1/m + 2p_1$, p_1 entier[3]. La fonction de Laughlin décrivait un système incompressible d'électrons de charge $-e$ et de rapport de remplissage $\upsilon = 1/m$. De l'interprétation en terme de plasma, on a

$$\rho^* = \frac{eB}{2\pi\hbar c}\frac{1}{mm_1}$$

$$q_1 = \frac{e}{m}\Big(\frac{1}{mm_1}\Big)$$

Cette charge q_1 a été retirée du milieu électronique. Ce dernier a donc un facteur de remplissage désormais égal à :

$$\begin{aligned}\upsilon_1 &= \upsilon - \frac{q_1}{e} \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2 m_1}\end{aligned}$$

[3] cas d'une statistique $\nu = 1/m$

D'où

$$\upsilon_1 = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{2p_1}}$$

Avec $m = 3$ et $p_1 = 1$, on tombe sur $\upsilon_1 = 2/7$, une des fractions observées expérimentalement. Notre fonction d'onde $\psi^+_{m_1}$ décrit l'évolution d'un fluide de quasi-trous.

En généralisant le problème ci-dessus, on peut créer des quasi-trous de deuxième génération de charge $e^{**} = e^*/m_1$ et de statistique $\nu_1 = 1/m_1$. Un calcul élémentaire donne

$$\nu_2 = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{2p_1 + \cfrac{1}{2p_2}}}$$

En tenant compte des quasi-particules, et en faisant des excitations récursives, on peut obtenir tout nombre de la forme

$$\nu = \cfrac{1}{m + \cfrac{\alpha_1}{2p_1 + \cfrac{\alpha_2}{2p_2 + \cfrac{\alpha_3}{2p_3 + \cdots}}}}$$

avec $\alpha_i = +1$ si la i-ième génération est constituée de quasi-trous et $\alpha_i = -1$ si elle est constituée de quasi-particules.

Le seul problème rencontré par cette théorie est qu'elle explique certaines fractions qui n'ont pas été observées expérimentalement. D'autres approches ont été abordées plus récemment.

3.2 Autres approches

Alors que l'effet Hall quantique entier est désormais bien expliqué, tous les scientifiques ne se sont pas mis d'accord sur l'explication apportée par Laughlin, même si la majorité l'a fait. D'autres pensent que cet effet fractionnaire serait du à une inhomogénéité du milieu. D'autres encore apportent une jolie explication [6]:

Considérons un anneau plat traversé par un champ $\vec{B}$ (comme précédemment), et considérons le hamiltonien de notre gaz d'électrons. L'état de base donne

$$H(\vec{p}_1 - e\vec{A}_1, \cdots, \vec{p}_n - e\vec{A}_n)\psi_0 = E_0\psi_0$$

Considérons un flux magnétique égal à $\phi = \phi_0 = h/e$. Soit ψ_1 la fonction d'onde associée. On doit avoir ψ_1 solution de l'équation ci-dessus par invariance de jauge.

Si l'état de base était non-dégénéré, on aurait $\psi_1 = \psi_0$. Le sytème serait revenu à son état initial après avoir transféré n électrons d'un bord à l'autre. On aurait donc[4]

$$\Delta U = neV_H$$
$$I_H = \partial U/\partial\phi = \Delta U/\phi_0$$
$$\sigma_H = ne^2/h$$

Par contre, si l'état de base était dégénéré, ψ_1 peut être différent de ψ_0, tout en étant un état de base du hamiltonien. Augmentons alors le flux du champ $\vec{B}$ à $2\phi_0, 3\phi_0, \cdots$. Si le sytème retombe sur son état initial après p étapes, pour $\phi = p\phi_0$, après avoir échangé au total q électrons, un raisonnement similaire donne :

$$\sigma_H = (q/p)e^2/h$$

L'inconvéniant de cette méthode par ailleurs très séduisante est qu'elle prévoit tous les q/p comme possibles. Or on est loin de tous les vérifier expérimentalement. Néanmoins l'idée reste intéressante.

4 Conclusion

On pourrait se demander si tout cela est vraiment utile. L'effet Hall classique l'est, c'est certain, en témoignent ses nombreuses applications (sondes à effet Hall, boussoles pour des pilotes automatiques par exemple). En est-il de même pour l'effet Hall quantique ?

En 1985 on nous fournit une réponse sans équivoque : K. v. Klitzing [2] gagne le prix nobel de physique pour sa découverte. Alors quelles applications ? Tout d'abord l'effet Hall quantique permet de déterminer avec précision la constante de structure fine[5] (et c'est en ce sens que K. v. Klitzing avait fait ses études). De plus, l'incroyable précision avec laquelle la quantification est obtenue (1 pour 10^8) a permis à l'effet Hall quantique de servir de référence pour la nouvelle définition du Ohm.

[4] se reporter à l'effet Hall quantique entier [7]

[5] on a $R_H = \alpha^{-1}\mu_0 c/2i$ si i niveaux de Landau sont remplis

References

[1] M. Stone, Quantum Hall Effect World Scientific Editions

[2] K. v. Klitzing, G. Dorda & M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 494.

[3] R. E. Prange, Phys. Rev.**B 23** (1981) 4802

[4] S. A. Trugman, Phys. Rev.**B 27** (1983) 7539

[5] F. D. M. Haldane and E. H. Rezayi, Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 956

[6] R. Tao and Yong-Shi Wu, Phys. Rev.**B 30** (1984) 1097

[7] R. B. Laughlin, Phys. Rev.**B 23** (1981) 5632